

Sur le produit tensoriel d'algèbres

Mohamed Tabaa *

Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, B.P. 1014 Rabat Maroc

Résumé

Let $\sigma : A \rightarrow B$ and $\rho : A \rightarrow C$ be two homomorphisms of noetherian rings such that $B \otimes_A C$ is a noetherian ring. we show that if σ is a regular (resp. complete intersection, resp. Gorenstein, resp. Cohen-Macaulay, S_n -) homomorphism, so is $\sigma \otimes 1_C$ and the converse is true if ρ faithfully flat. We deduce the transfert of the previous properties of B and C for $B \otimes_A C$, and then for the completed tensor product $B \hat{\otimes}_A C$. If $B \otimes_A B$ is noetherian and σ faithfully flat, we give a necessary and sufficient condition to $B \otimes_A B$ be a regular ring.

1 Introduction

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs et unitaires. Les notations sont celles de [8, §6].

Rappelons que si $\sigma : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens, on dit que σ est régulier s'il est plat et si pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A la $k(\mathfrak{p})$ -algèbre $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est géométriquement régulière, et que σ est d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. (S_n)) s'il est plat et si pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A l'anneau $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. vérifie (S_n)).

Dans ce qui suit nous montrons, que si $\sigma : A \rightarrow B$ et $\rho : A \rightarrow C$ sont deux homomorphismes d'anneaux noethériens tels que $B \otimes_A C$ soit un anneau noethérien, alors $\sigma \otimes 1_C$ est régulier (resp. d'intersection complète,

*mohamedtabaa11@gmail.com

resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. (S_n)) si σ l'est ; et que la réciproque est vraie si ρ est fidèlement plat.

Si A est un corps, on retrouve le Théorème 2 de [12] si B et C sont des anneaux de Gorenstein, le Théorème 2.1 de [5] si B et C sont des anneaux de Cohen-Macaulay et le Théorème 6 de [11] si B et C sont des anneaux d'intersection complète (resp. vérifient (S_n)).

Comme application nous montrons que si σ et ρ sont deux homomorphismes locaux d'anneaux locaux noethériens, et si le corps résiduel de C est de rang fini sur celui de A , alors le produit tensoriel complété $B \hat{\otimes}_A C$ est régulier si l'homomorphisme σ est formellement lisse et C est régulier, et il est d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay) si σ est plat et B et C le sont.

Si σ est fidèlement plat et $B \otimes_A B$ est un anneau noethérien, nous montrons que $B \otimes_A B$ est régulier si et seulement si A est régulier et σ est régulier.

Dans toute la suite nous utilisons librement les résultats de [10], et l'homologie d'André-Quillen telle qu'elle est définie dans [1].

2 Résultats

Proposition 2.1 *Soit $\sigma : A \rightarrow B$ un homomorphisme plat d'anneaux noethériens. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- 1) σ est régulier (resp. d'intersection complète).
- 2) $H_1(A, B, k(\mathfrak{q})) = 0$ (resp. $H_2(A, B, k(\mathfrak{q})) = 0$) pour tout idéal premier \mathfrak{q} de B .

Démonstration. Cas régulier : La démonstration utilise la Proposition 7.23, la Proposition 16.17 et le Théorème 30 de [1].

Cas d'intersection complète : (cf. [9]) On utilise [1]. Soit \mathfrak{q} idéal premier de B et $\mathfrak{p} = \sigma^{-1}(\mathfrak{q})$. D'après le Corollaire 5.27, la Proposition 4.54, la suite exacte associée aux homomorphismes $k(\mathfrak{p}) \rightarrow B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}} \rightarrow k(\mathfrak{q})$ et d'après la Proposition 7.4, on a $H_2(A, B, k(\mathfrak{q})) \cong H_3(B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}, k(\mathfrak{q}), k(\mathfrak{q}))$; l'équivalence 1) \iff 2) résulte donc de la Proposition 6.27.

Rappelons que si σ est plat (resp. fidèlement plat) il en est de même de $\sigma \otimes I_C$, et que si $\sigma \otimes I_C$ est plat et ρ est fidèlement plat alors σ est plat.

Théorème 2.1 *Soient $\sigma : A \rightarrow B$ et $\rho : A \rightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux noethériens. On suppose que $B \otimes_A C$ est un anneau noethérien.*

Si σ est régulier (resp. d'intersection complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. (S_n)), il en est de même de $\sigma \otimes I_C : C \rightarrow B \otimes_A C$; la réciproque est vraie si ρ est fidèlement plat.

Démonstration. Supposons que σ est régulier (resp. d'intersection complète). Soit \mathfrak{Q} un idéal premier de $B \otimes_A C$. L'homomorphisme σ est plat donc pour tout $n \geq 1$ on a l'isomorphisme $H_n(C, B \otimes_A C, k(\mathfrak{Q})) \cong H_n(A, B, k(\mathfrak{Q}))$ [1, Proposition 4.54]. Le résultat découle du Théorème précédent.

Inversement, soit \mathfrak{q} un idéal premier de B . L'homomorphisme $I_B \otimes \rho$ est fidèlement plat donc il existe un idéal premier \mathfrak{Q} de $B \otimes_A C$ tel que $(I_B \otimes \rho)^{-1}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{q}$. Comme σ est plat, pour tout $n \geq 1$ on a $H_n(C, B \otimes_A C, k(\mathfrak{Q})) \cong H_n(A, B, k(\mathfrak{Q}))$ et d'après [1, Lemme 3.20] on a

$$H_n(A, B, k(\mathfrak{Q})) \cong H_n(A, B, k(\mathfrak{q})) \otimes_{k(\mathfrak{q})} k(\mathfrak{Q}).$$

Comme $\sigma \otimes I_C$ est régulier (resp. d'intersection complète) on a $H_1(C, B \otimes_A C, k(\mathfrak{Q})) = 0$ (resp. $H_2(C, B \otimes_A C, k(\mathfrak{Q})) = 0$), d'où $H_1(A, B, k(\mathfrak{q})) = 0$ (resp. $H_2(A, B, k(\mathfrak{q})) = 0$). Le résultat découle donc du Théorème précédent.

Supposons maintenant que σ est de Gorenstein (resp. de Cohen-Macaulay, resp. (S_n)). Posons $D = B \otimes_A C$ et soit \mathfrak{r} un idéal premier de C . L'anneau $D \otimes_C k(\mathfrak{r}) = (B \otimes_A C) \otimes_C k(\mathfrak{r})$ est isomorphe à $B \otimes_A k(\mathfrak{r})$. Soit $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{r})$. Donc $D \otimes_C k(\mathfrak{r})$ est isomorphe à $(B \otimes_A k(\mathfrak{p})) \otimes_{k(\mathfrak{p})} k(\mathfrak{r})$. Comme l'homomorphisme $k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{r})$ est d'intersection complète, il résulte du cas précédent appliqué aux homomorphismes $k(\mathfrak{p}) \rightarrow k(\mathfrak{r})$ et $k(\mathfrak{p}) \rightarrow B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ que l'homomorphisme $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \rightarrow (B \otimes_A k(\mathfrak{p})) \otimes_{k(\mathfrak{p})} k(\mathfrak{r})$ est d'intersection complète. On en déduit que l'homomorphisme $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \rightarrow D \otimes_C k(\mathfrak{r})$ est de Gorenstein (resp. de Cohen-Macaulay, resp. (S_n)) et que par suite $D \otimes_C k(\mathfrak{r})$ est un anneau de de Gorenstein (resp. de Cohen-Macaulay, resp. vérifie (S_n)).

Inversement, soit \mathfrak{p} un idéal premier de A . L'homomorphisme ρ est fidèlement plat donc il existe un idéal premier \mathfrak{r} de C tel que $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{r})$. D'après ce qui précède l'homomorphisme $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \rightarrow D \otimes_C k(\mathfrak{r})$ est d'intersection complète. Comme il est fidèlement plat, $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est donc un anneau de de Gorenstein (resp. de Cohen-Macaulay, resp. vérifie (S_n)).

Dans [2] (resp. [3]) Avramov et Foxby donnent deux résultats concernant le changement de base plat pour l'homomorphisme de Gorenstein (resp. de Cohen-Macaulay) qu'ils ont défini.

Corollaire 2.2 Soient $\sigma : A \rightarrow B$ et $\rho : A \rightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux noethériens. On suppose que $B \otimes_A C$ est un anneau noethérien

et que σ est régulier (resp. d'intersection complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. (S_n)). Si C est un anneau régulier (resp. d'intersection complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. vérifie (S_n)) il en est de même de $B \otimes_A C$; la réciproque est vraie si σ est fidèlement plat.

On en déduit que si K est un corps et si $B \otimes_K C$ est un anneau noethérien alors $B \otimes_K C$ vérifie (S_n) si B et C la vérifient.

Corollaire 2.3 *Soit K un corps. On suppose que $B \otimes_K C$ est un anneau noethérien et que pour tout idéal maximal \mathfrak{n} de C , $k(\mathfrak{n})$ est séparable sur K . Si B et C sont réguliers alors $B \otimes_K C$ est régulier.*

Démonstration. Pour tout idéal maximal \mathfrak{n} de C , $k(\mathfrak{n})$ est séparable sur K et $C_{\mathfrak{n}}$ est régulier, donc $C_{\mathfrak{n}}$ est géométriquement régulière sur K . Le résultat découle donc du Corollaire 2.2 puisque l'homomorphisme $K \rightarrow C$ est régulier.

Corollaire 2.4 *Soient $\sigma : A \rightarrow B$ et $\rho : A \rightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux noethériens. On suppose que $B \otimes_A C$ est un anneau noethérien. Si σ est plat alors $B \otimes_A C$ est un anneau d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay) si B et C le sont ; la réciproque est vraie si σ et ρ sont fidèlement plat*

Corollaire 2.5 *Soient $\sigma : A \rightarrow B$ et $\rho : A \rightarrow C$ deux homomorphismes locaux d'anneaux locaux noethériens. On suppose que le corps résiduel C/\mathfrak{n} de C est de rang fini sur le corps résiduel A/\mathfrak{m} de A .*

a) *Si l'homomorphisme σ est formellement lisse et C est régulier alors l'anneau semi-local $B \hat{\otimes}_A C$ est régulier.*

b) *Si σ est plat alors $B \hat{\otimes}_A C$ est un anneau d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay) si B et C le sont.*

Démonstration. Cas où B est complet. On utilise le Lemme 19.7.1.2 de [7] : Posons $E = B \hat{\otimes}_A C$. D'après i) E est semi-local noethérien. Montrons que c'est un anneau régulier (resp. d'intersection complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay). Soit \mathfrak{Q} un idéal maximal de E . D'après ii) \mathfrak{Q} est au dessus de \mathfrak{n} . Pour montrer que $E_{\mathfrak{Q}}$ est régulier (resp. d'intersection complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay) il suffit de montrer que $(E/\mathfrak{n}E)_{\mathfrak{Q}}$ est régulier (resp. d'intersection complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay) puisque C l'est et d'après iii) E est un C -module

plat. D'après ii) $E/\mathfrak{n}E$ est isomorphe à $B \otimes_A (C/\mathfrak{n})$. Donc b) résulte du Corollaire 2.3. D'autre part $B \otimes_A (C/\mathfrak{n})$ est isomorphe à $(B/\mathfrak{m}B) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (C/\mathfrak{n})$ donc a) résulte du Corollaire 2.2 puisque l'homomorphisme $A/\mathfrak{m} \rightarrow B/\mathfrak{m}B$ est régulier.

Cas général. L'anneau $B \hat{\otimes}_A C$ s'identifie à $\hat{B} \hat{\otimes}_A C$. Il suffit d'appliquer le cas précédent aux homomorphismes $A \xrightarrow{\sigma} B \rightarrow \hat{B}$ et ρ . Dans a) l'homomorphisme $A \xrightarrow{\sigma} B \rightarrow \hat{B}$ est formellement lisse et dans b) \hat{B} vérifie la même propriété que B .

Proposition 2.6 *Soient $\sigma : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens. On suppose que $B \otimes_A B$ est un anneau noethérien et que σ est fidèlement plat. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *L'anneau A est régulier et l'homomorphisme σ est régulier.*
- 2) *L'anneau $B \otimes_A B$ est régulier.*

Démonstration. 1) \Rightarrow 2) Cela résulte du Corollaire 2.2.

2) \Rightarrow 1) Supposons $B \otimes_A B$ régulier. L'homomorphisme σ est fidèlement plat donc $\sigma \otimes I_B$ est fidèlement plat. Il en résulte que B est régulier puis que A est régulier. Montrons que σ est régulier. Soit \mathfrak{q} un idéal premier de B . Comme $H_1(A, B, k(\mathfrak{q})) = H_1(B, B \otimes_A B, k(\mathfrak{q}))$ il suffit de montrer que $H_1(B, B \otimes_A B, k(\mathfrak{q})) = 0$. On a la suite exacte

$$H_2(B \otimes_A B, B, k(\mathfrak{q})) \rightarrow H_1(B, B \otimes_A B, k(\mathfrak{q})) \rightarrow H_1(B, B, k(\mathfrak{q}))$$

associée à la factorisation $p \circ (\sigma \otimes_A I_B) = I_B$, où $p : B \otimes_A B \rightarrow B$ est l'homomorphisme canonique défini par $p(b \otimes b') = bb'$. D'après [1, Supplément, Proposition. 32] on $H_2(B \otimes_A B, B, k(\mathfrak{q})) = 0$. Donc $H_1(B, B \otimes_A B, k(\mathfrak{q})) = 0$ car on a $H_1(B, B, k(\mathfrak{q})) = 0$.

Notons que d'après le Corollaire 2.2, σ est régulier si et seulement si pour toute A -algèbre régulière C telle que $B \otimes_A C$ soit noethérien, l'anneau $B \otimes_A C$ est régulier.

Corollaire 2.7 *Soient K un corps et L une extension de K . On suppose que l'anneau $L \otimes_K L$ est noethérien. Alors $L \otimes_K L$ est un anneau régulier si et seulement si L est séparable sur K .*

Références

- [1] M. André, Homologie des algèbres commutatives, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

- [2] L.L. Avramov, H.-B. Foxby, Locally Gorenstein homomorphisms, Amer. J. math. 114 (1992), 1007-1047.
- [3] L.L. Avramov, H.-B. Foxby, Cohen-Macaulay properties of ring homomorphisms, Adv. Math. 133 (1998), 54-95.
- [4] L.L. Avramov, H.-B. Foxby, Locally complete intersection homomorphisms, Ann. of Math. 150 (1999), 455-487.
- [5] S. Bouchiba, S. Kabbaj, Tensor product of Cohen-Macaulay : Solution to a problem of Grothendieck, J. Algebra 252 (2002) 65-73.
- [6] S. Bouchiba , S. Kabbaj, Regularity of tensor products of k -algebras, arXiv :1202.5615v1.
- [7] A. Grothendieck, Eléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math. I.H.E.S. 20. 1967.
- [8] A. Grothendieck, Eléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math. I.H.E.S. 24. 1967.
- [9] J. Marot, P-rings and P-homomorphisms, J. Algebra 87 (1984) 136-149.
- [10] H. Matsumura, Commutative Rings Theory, Cambridge University Press, 1985.
- [11] M. Tousi, S. Yassemi, Tensor product of some special rings, J. Algebra 268 (2003) 672-676.
- [12] K. Watanabe, T. Ishikawa, S. Tachibana, K. Otsuka, On Tensor product of Gorenstein rings, J. Math. Kyoto Univ. 9 (1969) 413-423.